## 9 классы

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

*Вариант 1*

**1.** Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $2012^n+1$ делится нацело на $2013$. Решение обоснуйте.

**2.** Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, непараллельная оси $OX$. Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f(2013-f(x))=-2f(x)+2013$.

**3.** В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 2,5 и 5. Точка *E* – середина отрезка *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

**4.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен квадрат. С помощью данной линейки постройте новый квадрат, имеющий площадь в два раза большую площади изображенного квадрата. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

**5.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/8$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**6.** Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно 2.

**7.** В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$, $n \geq 4$. Постройте пример расположения городов и дорог для $n=4$ и $n=6$.

*Вариант 2*

**1.** Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $1000^n+1$ делится нацело на 1001. Решение обоснуйте.

**2.** Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, непараллельная оси $OX$. Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f(2013+f(x))=2f(x)+2013$.

**3.** В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 3,5 и 7. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

**4.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен квадрат. С помощью данной линейки постройте новый квадрат, имеющий площадь в два раза меньшую площади изображенного квадрата. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

**5.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $4/5$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $3/4$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 10 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**6.** Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно $\dfrac{1}{3}$.

**7.** В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$, $n \ge 4$. Постройте пример расположения городов и дорог для $n=4$ и $n=6$.

*Вариант 3*

**1.** Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $2012^n+1$ делится нацело на $2013$. Решение обоснуйте.

**2.** Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, непараллельная оси $OX$. Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f(2013-f(x))=2f(x)-2013$.

**3.** В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 4,5 и 9. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

**4.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен квадрат. С помощью данной линейки постройте новый квадрат, имеющий площадь в два раза большую площади изображенного квадрата. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

**5.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта $A$ в находящийся ниже по течению пункт $B$ и совершают безостановочное движение между $A$ и $B$. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от $A$ до $B$, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в $B$ проехал $1/8$ всего расстояния от $B$ до $A$. Первый раз в пункт $B$ автобус прибыл на 24 минуты позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте $A$, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**6.** Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно $\frac{1}{2}$.

**7.** В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$, $n \geq 4$. Постройте пример расположения городов и дорог для $n=4$ и $n=6$.

*Вариант 4*

**1.** Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $100^n+1$ делится нацело на 101. Решение обоснуйте.

**2.** Графиком функции $y = f(x)$ является прямая, непараллельная оси $OX$. Найдите функцию $y = f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f(2013 - f(x)) = -2f(x) - 2013$.

**3.** В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 5,5 и 11. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

**4.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен квадрат. С помощью данной линейки постройте новый квадрат, имеющий площадь в два раза меньшую площади изображенного квадрата. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

**5.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $16/25$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/3$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 9 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**6.** Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно $\dfrac{1}{2}$.

**7.** В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$, $n \geq 4$. Постройте пример расположения городов и дорог для $n=4$ и $n=6$.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Вариант 1*

**Задача 1.**

Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $2012^n+1$ делится нацело на 2013. Решение обоснуйте.

**Решение:**

Заметим, что $2012^n+1=(2013-1)^n+1=a\cdot 2013+(-1)^n+1$, для некоторого целого числа $a$. Тогда очевидно, что $2012^n+1$ делится нацело на 2013 при нечетном $n$ и не делится при четном.

**Ответ:** при любом нечетном $n$.

**Задача 2.**

Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, непараллельная оси *OX*. Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f\big(2013-f(x)\big)=-2f(x)+2013$.

**Решение:**

Пусть $f(x)=kx+b$. Подставим в условие задачи:

$$f(2013-kx-b)=-2(kx+b)+2013,$$

$$k(2013-kx-b)+b=-2(kx+b)+2013.$$

Данное равенство есть равенство линейных функций. Отсюда получим:

$$-k^2=-2k,$$

$$k(2013-b)+b=-2b+2013$$

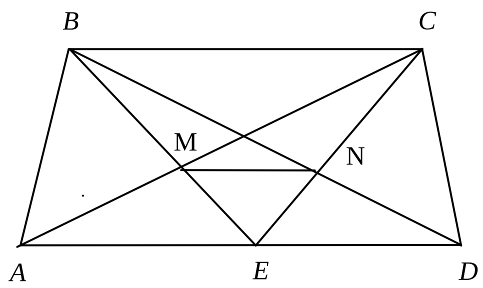
Так как по условию прямая не параллельна оси *OX*, то $k\neq 0$, из первого уравнения находим $k=2$. Тогда из второго уравнения $b=-2013$.

**Ответ:** $f(x)=2x-2013$.

**Задача 3.**

В трапеции $ABCD$ длины оснований $BC$ и $AD$ равны соответственно, 2,5 и 5. Точка $E$ – середина отрезка $AD$. Отрезки $BE$ и $CE$ пересекаются с диагоналями $AC$ и $BD$ в точках $M$ и $N$. Найдите длину отрезка $MN$.

**Решение:**



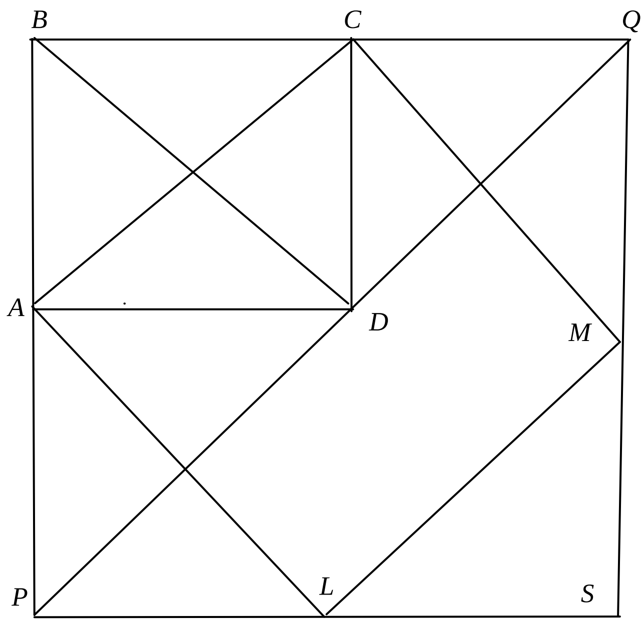

Из условия задачи следует, что $BC=ED=2{,}5$ и $BC\|ED$, а тогда по признаку параллелограмма –$BCDE$ параллелограмм. Тогда $N$ - точка пересечения диагоналей параллелограмма, а значит, середина $CE$. Аналогично, $BCEA$ – параллелограмм и $M$ – середина $BE$.

Тогда $MN$ – средняя линия треугольника $BEC$, а значит, $MN=1{,}25$.

**Ответ:** $MN=1{,}25$.

**Задача 4.**

Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен квадрат $ABCD$. С помощью данной линейки постройте новый квадрат, имеющий площадь в *два раза большую* площади изображенного квадрата. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.




**Решение:**

Пусть $ABCD$ – исходный квадрат. Построение:

1. Продолжим стороны $BC$ и $AB$, и проведем диагонали в квадрате $ABCD$.

2. Через вершину $D$ квадрата $ABCD$ проведем прямую, параллельную диагонали $AC$. Она пересечет продолжения сторон $BC$ и $AB$ в некоторых точках $Q$ и $P$ соответственно.
3. Проведем через точку $Q$, прямую параллельную $AB$, и через точку $P$ – прямую, параллельную $BC$. Они пересекутся в точке $S$.
4. Теперь остается провести прямые $CM \parallel AL \parallel BD$, где $M = CM \cap QS, L = AL \cap PS$. Соединив точки $M$ и $L$, получим искомый квадрат $ACML$.

Обоснование: Из простых геометрических рассуждений легко получить, что построенная фигура $ACML$ действительно является квадратом. При этом сторона квадрата $AC = \sqrt{2} \cdot BC$, следовательно, площадь $S_{ACML} = 2 \cdot BC^2 = 2 \cdot S_{ABCD}$.

**Задача 5.**

Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта $A$ в находящийся ниже по течению пункт $B$ и совершают безостановочное движение между $A$ и $B$. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от $A$ до $B$, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в $B$ проехал $1/8$ всего расстояния от $B$ до $A$. Первый раз в пункт $B$ автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте $A$, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**Решение:**

Обозначим через $v$ – скорость течения реки, $w$ – скорость катера в неподвижной воде, $u$ – скорость автобуса, $S$ – расстояние от $A$ до $B$. Из условий задачи нетрудно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{5}{9}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{\frac{4}{9}S}{w-v} \\ \dfrac{\frac{9}{8}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{S}{w-v} + \dfrac{\frac{7}{8}S}{w+v} \\ \dfrac{S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Введя новые переменные $a = \dfrac{S}{u}$, $b = \dfrac{S}{w+v}$, $c = \dfrac{S}{w-v}$, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{9}a = b + \dfrac{4}{9}c \\ \dfrac{9}{8}a = b + c + \dfrac{7}{8}b \\ a = b + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Решая систему, найдем $a = \dfrac{6}{15}$, $b = \dfrac{2}{15}$, $c = \dfrac{3}{15}$, где $a$ – время движения автобуса из пункта $A$ в пункт $B$, $b$ – время движения катера по течению реки из $A$ в $B$ и $c$ – время движения катера против течения реки из $B$ в $A$.

Значит, автобус в пункте $A$ оказывается через каждые $2 \cdot a = \dfrac{12}{15}$ часа, а катер через каждые $b + c = \dfrac{5}{15}$ часа. Следовательно, одновременно в пункте $A$ они окажутся через время $t = \dfrac{НОК(12;5)}{15} = 4$ часа.

**Ответ:** 4 часа.

**Задача 6.**

Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно 2.

**Решение:**

В данной системе выразим из 1-го уравнения $z$ и подставим полученное во 2-е уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2-x-y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}=-\frac{x+y}{2(2-x-y)}$$

Откуда следует, что либо $x+y=0$, либо $\frac{1}{xy}=-\frac{1}{2(2-x-y)} \Leftrightarrow xy=-4+2x+2y \Leftrightarrow$ $(x-2)(y-2)=0$.

В первом случае имеем: $z=2-(x+y)=2$, а во втором $(x-2)(y-2)=0$. Откуда или $x=2$ или $y=2$. Что и требовалось доказать.

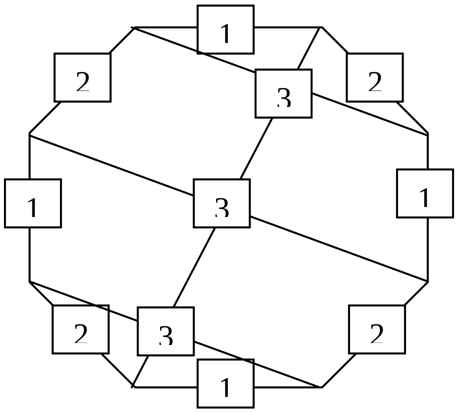
**Задача 7.**

В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n \geq 4$. Постройте пример расположения городов и дорог для $n=4$ и $n=6$.

**Решение:**

Пусть $k$ – число различных дорог в стране. Посчитаем суммарное количество дорог в стране с учетом повторений. Будем идти по всем городам и считать количество дорог их соединяющих. Так как из каждого города выходит ровно три дороги, то суммарное количество дорог с учетом повторений равно $3n$. В то же время, каждая дорога соединяет два города, а значит, при таком подсчете учтется дважды, а стало быть, $3n=2k$. Следовательно, $n$ четное.

Приведем пример построения такой конструкции для произвольного четного $n$. Пусть на плоскости изображен выпуклый $n$ угольник (при четном $n$). Пронумеруем его вершины числами 1,2,3,4,…, а стороны последовательно цифрами 1,2,1,2,1…. Соединим отрезками вершины с номерами $i+1$ и $n-i+1$ при $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}-1$. Эти отрезки пронумеруем цифрой 3.




Остается соединить дорогой с номером 3 вершины 1 и $\frac{n}{2}+1$ (см. рис. выше).

## 10 классы

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

*Вариант 1*

**1.** Пусть $a=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$. Покажите, что число $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$ является целым и разложите его на простые множители.

**2.** Последовательность $u_n$ $(n=0,1,2,\dots)$ определяется следующим образом: $u_0=1$, $u_1=2$, $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ при четном $n$, и $u_{n+2}=-u_{n+1}+u_n$ при нечетном $n$ Найдите $u_{2013}$. Решение обоснуйте.

**3.** Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $2011^n+2013^n$ делится нацело на $2012$. Решение обоснуйте.

**4.** Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, непараллельная оси $OX$. Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f(2013-f(x))=-2f(x)+2013$.

**5.** В равнобедренной трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 1 и 3. Точка *E* – середина отрезка *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

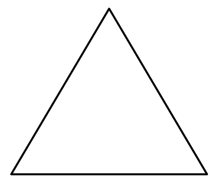
**6.** Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно 2.

**7.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/8$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**8.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен правильный треугольник. С помощью данной линейки постройте новый правильный треугольник, имеющий площадь в три раза большую, чем площадь изображенного треугольника. Шаги построения опишите.



**9.** В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$, $n \geq 4$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

*Вариант 2*

**1.** Пусть $a=2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$. Покажите, что число $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}$ является целым и разложите его на простые множители.

**2.** Последовательность $u_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ определяется следующим образом: $u_0=1$, $u_1=-1$, $u_{n+2}=-u_{n+1}+u_n$ при четном $n$, и $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ при нечетном $n$. Найдите $u_{2013}$. Решение обоснуйте.

**3.** Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $1000^n+1002^n$ делится нацело на 1001. Решение обоснуйте.

**4.** Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, непараллельная оси $OX$. Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f(2013+f(x))=2f(x)+2013$.

**5.** В равнобедренной трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 1 и 4. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

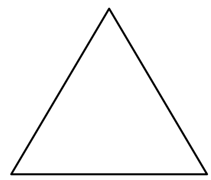
**6.** Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3 \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно $\frac{1}{3}$.

**7.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт В и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $4/5$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в В проехал $3/4$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 10 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте $A$, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**8.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен правильный треугольник. С помощью данной линейки постройте новый правильный треугольник, имеющий площадь в три раза меньшую, чем площадь изображенного треугольника. Шаги построения опишите.



**9.** В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$, $n \geq 4$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

*Вариант 3*

**1.** Пусть $a = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. Покажите, что число $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$ является целым и разложите его на простые множители.

**2.** Последовательность $u_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ определяется следующим образом: $u_0 = -2$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ при четном $n$, и $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$ при нечетном $n$. Найдите $u_{2013}$. Решение обоснуйте.

**3.** Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $2011^n + 2013^n$ делится нацело на $2012$. Решение обоснуйте.

**4.** Графиком функции $y = f(x)$ является прямая, непараллельная оси $OX$. Найдите функцию $y = f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f(2013 - f(x)) = 2f(x) - 2013$.

**5.** Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

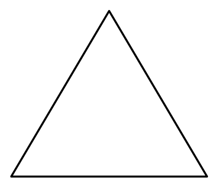
$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно $\frac{1}{2}$.

**6.** В равнобедренной трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 2 и 5. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

**7.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/8$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 24 минуты позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**8.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен правильный треугольник. С помощью данной линейки постройте новый правильный треугольник, имеющий площадь в три раза большую, чем площадь изображенного треугольника. Шаги построения опишите.



**9.** В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами.

Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$, $n \geq 4$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

*Вариант 4*

**1.** Пусть $a = 2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$. Покажите, что число $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}$ является целым и разложите его на простые множители.

**2.** Последовательность $u_n$ $(n = 0,1,2,\dots)$ определяется следующим образом: $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$ при четном $n$, и $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ при нечетном $n$. Найдите $u_{2013}$. Решение обоснуйте.

**3.** Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $1000^n + 1002^n$ делится нацело на 1001. Решение обоснуйте.

**4.** Графиком функции $y = f(x)$ является прямая, непараллельная оси $OX$. Найдите функцию $y = f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f(2013 - f(x)) = -2f(x) - 2013$.

**5.** Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

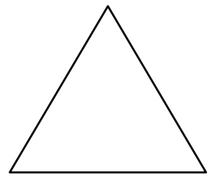
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно 1.

**6.** В равнобедренной трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 2 и 5. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

**7.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $16/25$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/3$ всего расстояния от $B$ до $A$. Первый раз в пункт $B$ автобус прибыл на 9 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте $A$, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**8.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен правильный треугольник. С помощью данной линейки постройте новый правильный треугольник, имеющий площадь в три раза меньшую, чем площадь изображенного треугольника. Шаги построения опишите.



**9.** В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$, $n \geq 4$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### *Вариант 1*

**Задача 1.**

Пусть $a = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$. Покажите, что число $1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$ является целым и разложите его на простые множители.

**Решение:**

Используя формулы приведения и формулу для синуса двойного угла, получим цепочку равенств:

$$a=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{16}$$

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=1+16+16^2+16^3=17+16^2\cdot 17=17\cdot 257$$

**Ответ:** $a=\frac{1}{16}$, $a=17\cdot 257$.

**Задача 2.**

Последовательность $u_n$ $(n=0,1,2\ldots)$ определяется следующим образом: $u_0=1$, $u_1=2$, $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ при четном $n$, и $u_{n+2}=-u_{n+1}+u_n$ при нечетном $n$. Найдите $u_{2013}$. Решение обоснуйте.

**Решение:**

Пусть $n$ – нечетное. Тогда справедливы равенства:

$$u_{n+2}=-u_{n+1}+u_n=-(u_n+u_{n-1})+u_n=-u_{n-1}.$$

Тогда $n-1$ - четное и

$$u_{n-1}=u_{n-2}+u_{n-3}=-u_{n-3}+u_{n-4}+u_{n-3}=u_{n-4}.$$

Таким образом, при любом нечетном $n$ верно равенство:

$$u_{n+2}=-u_{n-1}=-u_{n-4}.$$

или, что то же самое, при любом нечетном $n$ верно равенство:

$$u_{n+6}=-u_n.$$

Следовательно, $u_{2013}=u_{2+6\cdot 335}=(-1)^{335}u_2=-(u_1+u_0)=-3$.

**Ответ:** $u_{2013}=-3$.

**Задача 3.**

Найдите все натуральные числа $n$, при каждом из которых число $2011^n+2013^n$ делится нацело на 2012. Решение обоснуйте.

**Решение:**

Заметим, что:

$$2011^n+2013^n=(2012-1)^n+(2012+1)^n=$$
$$=a\cdot 2012+(-1)^n+b\cdot 2012+1,$$

для некоторых целых чисел $a,b$. Тогда, очевидно $2011^n+2013^n$ делится нацело на 2012 при нечетном $n$ и не делится при четном.

**Ответ:** при любом нечетном $n$.

**Задача 4.**

Графиком функции $y = f(x)$ является прямая, непараллельная оси *OX*. Найдите функцию $y = f(x)$, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство $f\big(2013 - f(x)\big) = -2f(x) + 2013$.

**Решение:**

Пусть $f(x) = kx + b$. Подставим в условие задачи:

$$f(2013 - kx - b) = -2(kx + b) + 2013,$$

$$k(2013 - kx - b) + b = -2(kx + b) + 2013.$$

Данное равенство есть равенство линейных функций. Отсюда получим:

$$-k^2 = -2k,$$

$$k(2013 - b) + b = -2b + 2013$$

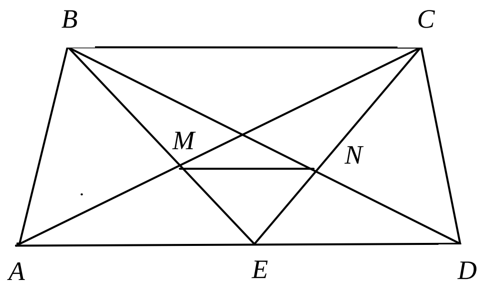
Так как по условию прямая не параллельна оси *OX*, то $k \neq 0$, из первого уравнения находим $k = 2$. Тогда из второго уравнения $b = -2013$.

**Ответ:** $f(x) = 2x - 2013$.

**Задача 5.**

В равнобедренной трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 1 и 3. Точка *E* – середина отрезка *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Найдите длину отрезка *MN*.

**Решение:**




Очевидно, что треугольники *AME* и *CBM* подобны по двум углам и их коэффициент подобия равен $\frac{ME}{BM} = \frac{AE}{BC} = 1{,}5$. Поскольку трапеция равнобедренная, то несложно показать, что *MN* ∥ *BC* и тогда треугольники *MNE* и *BCE* также подобны. Отсюда имеем:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{ME}{BE} = \frac{ME}{BM + ME} = \frac{1{,}5}{1 + 1{,}5} = \frac{3}{5}.$$

.

**Ответ:** $\frac{MN}{BC} = \frac{3}{5}$.

**Задача 6.**

Для чисел $x$, $y$ и $z$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ равно 2.

**Решение:**

В данной системе выразим из 1-го уравнения $z$ и подставим полученное во 2-е уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2-x-y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}=-\frac{x+y}{2(2-x-y)}$$

Откуда следует, что либо $x+y=0$, либо $\frac{1}{xy} = -\frac{1}{2(2-x-y)} \Leftrightarrow xy=-4+2x+2y \Leftrightarrow (x-2)(y-2)=0$.

В первом случае имеем: $z = 2-(x+y) = 2$, а во втором $(x-2)(y-2)=0$. Откуда или $x=2$ или $y=2$. Что и требовалось доказать.

**Задача 7.**

Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта $A$ в находящийся ниже по течению пункт $B$ и совершают безостановочное движение между $A$ и $B$. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от $A$ до $B$, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в $B$ проехал $1/8$ всего расстояния от $B$ до $A$. Первый раз в пункт $B$ автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте $A$, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**Решение:**

Обозначим через $v$ – скорость течения реки, $w$ – скорость катера в неподвижной воде, $u$ – скорость автобуса, $S$ – расстояние от $A$ до $B$. Из условий задачи нетрудно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{5}{9}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{\frac{4}{9}S}{w-v} \\ \dfrac{\frac{9}{8}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{S}{w-v} + \dfrac{\frac{7}{8}S}{w+v} \\ \dfrac{S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Введя новые переменные $a = \dfrac{S}{u}$, $b = \dfrac{S}{w+v}$, $c = \dfrac{S}{w-v}$, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{9}a = b + \dfrac{4}{9}c \\ \dfrac{9}{8}a = b + c + \dfrac{7}{8}b \\ a = b + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

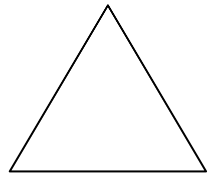
Решая систему, найдем $a = \dfrac{6}{15}$, $b = \dfrac{2}{15}$, $c = \dfrac{3}{15}$, где $a$ – время движения автобуса из пункта $A$ в пункт $B$, $b$ – время движения катера по течению реки из $A$ в $B$ и $c$ – время движения катера против течения реки из $B$ в $A$.

Значит, автобус в пункте $A$ оказывается через каждые $2 \cdot a = \dfrac{12}{15}$ часа, а катер через каждые $b + c = \dfrac{5}{15}$ часа. Следовательно, одновременно в пункте $A$ они окажутся через время $t = \dfrac{НОК(12;5)}{15} = 4$ часа.

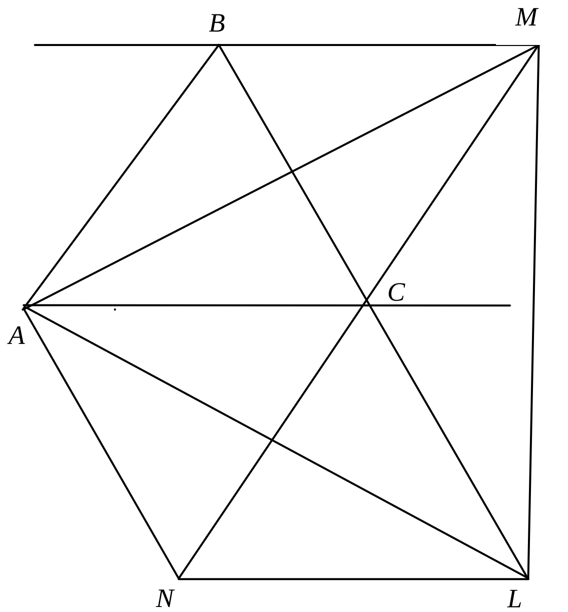
**Ответ:** 4 часа.

**Задача 8.**

Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображен правильный треугольник. С помощью данной линейки постройте новый правильный треугольник, имеющий площадь в три раза большую, чем площадь изображенного треугольника. Шаги построения опишите.



**Решение:**




Пусть *ABC* – исходный правильный треугольник. Построение:

1. Проведем прямую *BM* параллельно *AC*, *CM* параллельно *AB*: $M = CM \cap BM$.
2. Проведем прямую *AN* параллельно *BC*: $N = CM \cap AN$.
3. Проведем прямую *NL* параллельно *AC*: $L = BC \cap NL$.

Тогда треугольник *AML* - правильный и его площадь в три раза больше площади треугольника *ABC*.

Обоснование: по построению *ABMC* и *ACLN* – равные между собой ромбы с острым углом $60^\circ$. Тогда $\angle MAL = 60^\circ$ и следовательно, треугольник *AML* правильный. При этом $AM = AL = \sqrt{3}AB$, а значит, $S_{AML} = \frac{\sqrt{3}}{4}AM^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = 3S_{ABC}$.

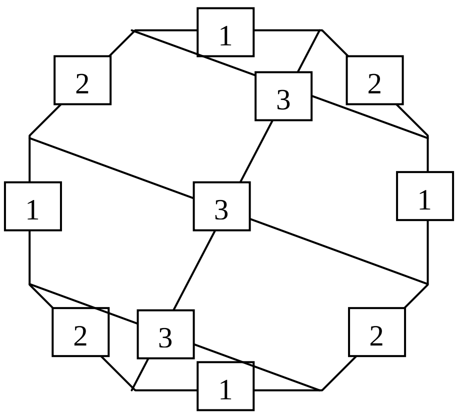
**Задача 9.**

В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n \geq 4$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

**Решение:**

Пусть $k$ – число различных дорог в стране. Посчитаем суммарное количество дорог в стране с учетом повторений. Будем идти по всем городам и считать количество дорог их соединяющих. Так как из каждого города выходит ровно три дороги, то суммарное количество дорог с учетом повторений равно $3n$. В то же время, каждая дорога соединяет два города, а значит, при таком подсчете учтется дважды, а стало быть, $3n = 2k$. Следовательно, $n$ четное.

Приведем пример построения такой конструкции для произвольного четного $n$. Пусть на плоскости изображен выпуклый $n$ угольник (при четном $n$). Пронумеруем его вершины числами 1,2,3,4,…, а стороны последовательно цифрами 1,2,1,2,1…. Соединим отрезками вершины с номерами $i+1$ и $n-i+1$ при $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1$. Эти отрезки пронумеруем цифрой 3.




Остается соединить дорогой с номером 3 вершины 1 и $\frac{n}{2}+1$ (см. рис. выше).

**11 классы**

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

*Вариант 1*

**1.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/8$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**2.** Последовательность $u_0, u_1, u_2 \ldots$ удовлетворяет следующим соотношениям: $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ , если $n$ – четное и $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, если $n$ – нечетное. Известно, что $u_0 = 1, u_1 = 2$. Найдите $u_{2013}$. Ответ обоснуйте.

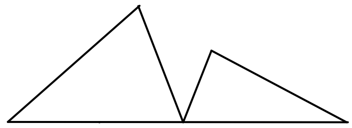
**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 2\cos^3 y \\ \sin x = 2\sin^3 y \end{cases}$$

**4.** Функция $f(x)$ определена при всех значениях переменной $x$. При этом для всех $x$ выполняется равенство $(f(x-2013)-1)(f(x+2013)-1) = -2$. Докажите, что функция $f(x)$ является периодической.

**5.** В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 1 и 3. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Докажите, что отрезок *MN* параллелен основаниям трапеции. Найдите длину отрезка *MN*.

**6.** Найдите наименьшее натуральное число $n$ такое, что число $n+2012$ делится нацело на $2013$, а число $n+2013$ делится нацело на $2012$. Ответ обоснуйте.



**7.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображены два треугольника (см. рис), имеющие одинаковые длины двух сторон, расположенных на одной прямой. С помощью данной линейки постройте новый треугольник, имеющий площадь равную сумме площадей изображенных треугольников. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

**8.** В некоторой стране имеется $n$ городов. Города соединяются непересекающимися между собой дорогами. Из каждого города выходят ровно три дороги, по которым из города можно выехать и соответственно, въехать. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят дороги с тремя различными номерами 1, 2, 3. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

**9.** Пусть выполнены условия задачи № 8. Путешественник выехал из некоторого города $A$, избрав себе следующий маршрут движения: из города $A$ он выезжает по дороге с номером 1, из следующего города – по дороге с номером 2, затем с номером 3, далее – снова по дорогам с номерами 1, 2, 3, 1, 2,…. Докажите, что при таком маршруте движения путешественник обязательно вернется в город $A$.

*Вариант 2*

**1.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта $A$ в находящийся ниже по течению пункт $B$ и совершают безостановочное движение между $A$ и $B$. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $4/5$ всего расстояния от $A$ до $B$, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в $B$ проехал $3/4$ всего расстояния от $B$ до $A$. Первый раз в пункт $B$ автобус прибыл на 10 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**2.** Последовательность $u_0, u_1, u_2 \dots$ удовлетворяет следующим соотношениям: $u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n$, если $n$ – четное и $u_{n+2} = -u_{n+1} + 3u_n$, если $n$ – нечетное. Известно, что $u_0 = 1, u_1 = 2$. Найдите $u_{2013}$.

**3.** Решите систему уравнений

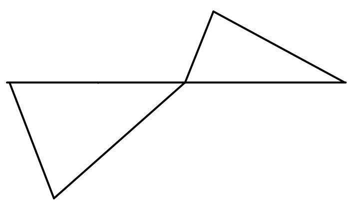
$$\begin{cases} \cos x = -2\cos^3 y \\ \sin x = 2\sin^3 y \end{cases}$$

**4.** Функция $f(x)$ определена при всех значениях переменной $x$. При этом для всех $x$ выполняется равенство $(f(x)+1)(f(x+2013)+1) = 2013$. Докажите, что функция $f(x)$ является периодической.

**5.** В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 1 и 4. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Докажите, что отрезок *MN* параллелен основаниям трапеции, найдите длину отрезка *MN*.

**6.** Найдите наименьшее натуральное число $n$ такое, что число $n-2012$ делится нацело на $2013$, а число $n+2013$ делится нацело на $2012$. Решение обоснуйте.

**7.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся.



На плоскости изображены два треугольника (см. рис), имеющие одинаковые длины двух сторон, расположенных на одной прямой. С помощью данной линейки постройте новый треугольник, имеющий площадь равную разности площадей изображенных треугольников. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

**8.** В некоторой стране имеется $n$ городов. Города соединяются непересекающимися между собой дорогами. Из каждого города выходят ровно три дороги, по которым из города можно выехать и соответственно, въехать. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят дороги с тремя различными номерами 1, 2, 3. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

**9.** Пусть выполнены условия задачи № 8. Путешественник выехал из некоторого города *A*, избрав себе следующий маршрут движения: из города *A* он выезжает по дороге с номером 1, из следующего города – по дороге с номером 2, затем с номером 3, далее – снова по дорогам с номерами 1, 2, 3, 1, 2, …. Докажите, что при таком маршруте движения путешественник обязательно вернется в город *A*.

*Вариант 3*

**1.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/8$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 24 минуты позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**2.** Последовательность $u_0, u_1, u_2 \dots$ удовлетворяет следующим соотношениям: $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$, если $n$ – четное и $u_{n+2} = u_{n+1} - 3u_n$, если $n$ – нечетное. Известно, что $u_0 = 1, u_1 = 2$. Найдите $u_{2013}$.

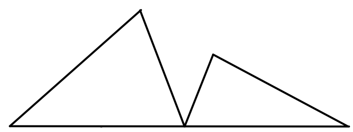
**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 2\cos^3 y \\ \sin x = -2\sin^3 y \end{cases}$$

**4.** Функция $f(x)$ определена при всех значениях переменной $x$. При этом для всех $x$ выполняется равенство $(f(x-2013)-2013)(f(x)-2013)=1$. Докажите, что функция $f(x)$ является периодической.

**5.** В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 2 и 3. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Докажите, что отрезок *MN* параллелен основаниям трапеции, найдите длину отрезка *MN*.

**6.** Найдите наименьшее натуральное число $n$, превосходящее 2 такое, что число $n+2012$ делится нацело на $2013$, а число $n-2013$ делится нацело на $2012$. Решение обоснуйте.



**7.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображены два треугольника (см. рис), имеющие одинаковые длины двух сторон, расположенных на одной прямой. С помощью данной линейки постройте новый треугольник, имеющий площадь равную сумме площадей изображенных треугольников. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

**8.** В некоторой стране имеется $n$ городов. Города соединяются непересекающимися между собой дорогами. Из каждого города выходят ровно три дороги, по которым из города можно выехать и соответственно, въехать. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят дороги с тремя различными номерами 1, 2, 3. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

**9.** Пусть выполнены условия задачи № 8. Путешественник выехал из некоторого города *A*, избрав себе следующий маршрут движения: из города *A* он выезжает по дороге с номером 1, из следующего города – по дороге с номером 2, затем с номером 3, далее – снова по дорогам с номерами 1, 2, 3, 1, 2,…. Докажите, что при таком маршруте движения путешественник обязательно вернется в город *A*.

*Вариант 4*

**1.** Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта *A* в находящийся ниже по течению пункт *B* и совершают безостановочное движение между *A* и *B*. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $16/25$ всего расстояния от *A* до *B*, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в *B* проехал $1/3$ всего расстояния от *B* до *A*. Первый раз в пункт *B* автобус прибыл на 9 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте *A*, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**2.** Последовательность $u_0, u_1, u_2 \ldots$ удовлетворяет следующим соотношениям: $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$ , если $n$ – четное и $u_{n+2} = u_{n+1} - 4u_n$ , если $n$ – нечетное. Известно, что $u_0 = 1, u_1 = 2$. Найдите $u_{2013}$.

**3.** Решите систему уравнений

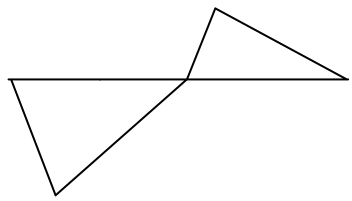
$$\begin{cases} \cos x = -2\cos^3 y \\ \sin x = -2\sin^3 y \end{cases}$$

**4.** Функция $f(x)$ определена при всех значениях переменной $x$. При этом для всех $x$ выполняется равенство $(f(x+2013)-1)(f(x)-1) = -1$. Докажите, что функция $f(x)$ является периодической.

**5.** В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 2 и 5. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Докажите, что отрезок *MN* параллелен основаниям трапеции, найдите длину отрезка *MN*.

**6.** Найдите наименьшее натуральное число $n$, превосходящее 4025 такое, что число $n-2012$ делится нацело на $2013$, а число $n-2013$ делится нацело на $2012$. Решение обоснуйте.

**7.** Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображены два треугольника (см. рис), имеющие одинаковые длины двух сторон, расположенных на одной прямой. С помощью данной линейки постройте новый треугольник, имеющий площадь равную разности площадей изображенных треугольников. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.



**8.** В некоторой стране имеется $n$ городов. Города соединяются непересекающимися между собой дорогами. Из каждого города выходят ровно три дороги, по которым из города можно выехать и соответственно, въехать. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят дороги с тремя различными номерами 1, 2, 3. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

**9.** Пусть выполнены условия задачи № 8. Путешественник выехал из некоторого города $A$, избрав себе следующий маршрут движения: из города $A$ он выезжает по дороге с номером 1, из следующего города – по дороге с номером 2, затем с номером 3, далее – снова по дорогам с номерами 1, 2, 3, 1, 2, …. Докажите, что при таком маршруте движения путешественник обязательно вернется в город $A$.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Вариант 1*

**Задача 1.**

Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта $A$ в находящийся ниже по течению пункт $B$ и совершают безостановочное движение между $A$ и $B$. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $5/9$ всего расстояния от $A$ до $B$, а вторая встреча - когда автобус после первого захода в $B$ проехал $1/8$ всего расстояния от $B$ до $A$. Первый раз в пункт $B$ автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте $A$, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

**Решение:**

Обозначим через $v$ – скорость течения реки, $w$ – скорость катера в неподвижной воде, $u$ – скорость автобуса, $S$ – расстояние от $A$ до $B$. Из условий задачи нетрудно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{5}{9}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{\frac{4}{9}S}{w-v} \\ \dfrac{\frac{9}{8}S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{S}{w-v} + \dfrac{\frac{7}{8}S}{w+v} \\ \dfrac{S}{u} = \dfrac{S}{w+v} + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Введя новые переменные $a = \dfrac{S}{u}$, $b = \dfrac{S}{w+v}$, $c = \dfrac{S}{w-v}$, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{9}a = b + \dfrac{4}{9}c \\ \dfrac{9}{8}a = b + c + \dfrac{7}{8}b \\ a = b + \dfrac{16}{60} \end{cases}$$

Решая систему, найдем $a=\frac{6}{15}$, $b=\frac{2}{15}$, $c=\frac{3}{15}$, где $a$ – время движения автобуса из пункта $A$ в пункт $B$, $b$ – время движения катера по течению реки из $A$ в $B$ и $c$ – время движения катера против течения реки из $B$ в $A$.

Значит, автобус в пункте $A$ оказывается через каждые $2\cdot a=\frac{12}{15}$ часа, а катер через каждые $b+c=\frac{5}{15}$ часа. Следовательно, одновременно в пункте $A$ они окажутся через время $t=\frac{НОК(12;5)}{15}=4$ часа.

**Ответ:** 4 часа.

**Задача 2.**

Последовательность $u_0, u_1, u_2, \ldots$ удовлетворяет следующим соотношениям: $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$, если $n$ – четное и $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$, если $n$ – нечетное. Известно, что $u_0=1, u_1=2$. Найдите $u_{2013}$. Ответ обоснуйте.

**Решение:**

Пусть $n$ – нечетное. Тогда справедливы равенства:

$$u_{n+4}=3u_{n+3}-2u_{n+2}=3(u_{n+2}-u_{n+1})-2u_{n+2}=u_{n+2}-3u_{n+1}=$$
$$=3u_{n+1}-2u_n-3u_{n+1}=-2u_n.$$

Следовательно, $u_{2013}=u_{1+4\cdot503}=(-2)^{503}u_1=-2^{504}$.

**Ответ:** $u_{2013}=-2^{504}$.

**Задача 3.**

Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos x=2\cos^3 y\\ \sin x=2\sin^3 y\end{cases}$$

**Решение:**

Возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Получим следствие из исходной системы:

$$4\cos^6 y+4\sin^6 y=1.$$

Разделим полученное равенство на 4 и применим к левой части формулу суммы кубов. Имеем:

$$(\cos^2 y+\sin^2 y)\cdot(\cos^4 y-\cos^2 y\sin^2 y+\sin^4 y)=\frac{1}{4},$$

$$\cos^4 y-\cos^2 y\sin^2 y+\sin^4 y=\frac{1}{4},$$

$$(\cos^2 y+\sin^2 y)^2-3\cos^2 y\sin^2 y=\frac{1}{4},$$

$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2y=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 2y=1 \Leftrightarrow 2y=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z},$$

$$y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$$

Разбивая полученное решение на 4 серии, получим следующий ответ.

**Ответ:** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $y=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $y=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$; $x=\frac{7\pi}{4}+2\pi k$, $y=\frac{7\pi}{4}+2\pi n$.

**Задача 4.**

Функция $f(x)$ определена при всех значениях переменной $x$. При этом для всех $x$ выполняется равенство $(f(x-2013)-1)(f(x+2013)-1)=-2$. Докажите, что функция $f(x)$ является периодической.

**Решение:**

Согласно условию задачи получим равенство:

$$(f(x-3\cdot 2013)-1)(f(x-2013)-1)=-2.$$

Разделим тождество $(f(x-2013)-1)(f(x+2013)-1)=-2$ из условия на полученное равенство, тогда придем к равенству:

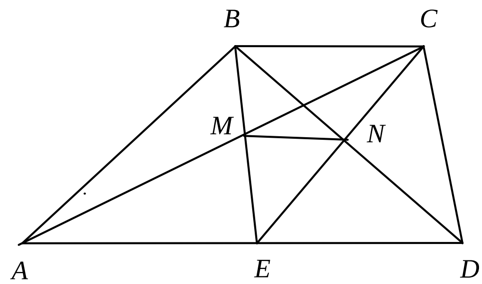
$$\frac{f(x-3\cdot 2013)-1}{f(x+2013)-1}=1 \Leftrightarrow f(x-3\cdot 2013)-1=f(x+2013)-1.$$

Откуда следует, что $f(x+4\cdot 2013)=f(x)$. Таким образом, $4\cdot 2013$ - период (возможно не минимальный) функции $f(x)$. Что и требовалось доказать.

**Задача 5.**

В трапеции *ABCD* длины оснований *BC* и *AD* равны соответственно, 1 и 3. Точка *E* – середина *AD*. Отрезки *BE* и *CE* пересекаются с диагоналями *AC* и *BD* в точках *M* и *N*. Докажите, что отрезок *MN* параллелен основаниям трапеции. Найдите длину отрезка *MN*.

**Решение:**




Очевидно, что следующие пары треугольников подобны (по двум углам): $AME \approx CBM$ и $DNE \approx BNC$. При этом, так как $AE=ED$, то их коэффициенты подобия равны между собой и равны $\frac{AE}{BC} = \frac{ED}{BC} = 1{,}5$. Следовательно $\frac{ME}{BM} = \frac{NE}{CN}$, а тогда из обратной теоремы Фалеса следует, что $MN||BC$ и треугольники *BEC* и *MEN* подобны. Отсюда находим отношение:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{1{,}5}{1{,}5+1} = \frac{3}{5}.$$

и $MN = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5}$.

**Ответ:** $MN = \frac{3}{5}$.

**Задача 6.**

Найдите наименьшее натуральное число $n$ такое, что число $n + 2012$ делится нацело на 2013, а число $n + 2013$ делится нацело на 2012. Ответ обоснуйте.

**Решение:**

Из условия следует, что $n + 2013 = 2012k$, $n + 2012 = 2013t$, где $k$ и $t$ - некоторые натуральные числа. Тогда, вычитая из первого второе, получим:

$$2012k - 2013t = 1.$$

Отсюда:

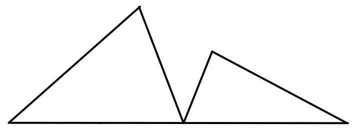
$$2012k - (2012 + 1)t = 1.$$

$$2012(k - t) = t + 1.$$

Следовательно, наименьшее натуральное число $t$ с таким  равно 2011. И наименьшее натуральное $n$ из условия задачи: $n = 2013 \cdot 2011 - 2012 = 4046131$.

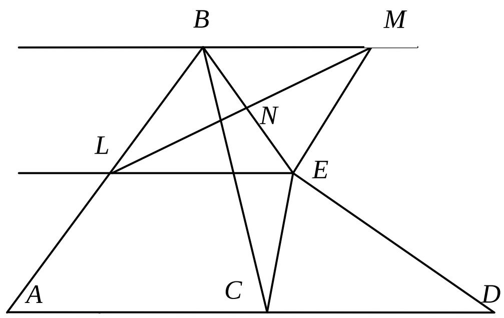
**Ответ:** 4046131.

**Задача 7.**



Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия:  проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображены два треугольника (см. рис), имеющие одинаковые длины двух сторон, расположенных на одной прямой. С помощью данной линейки постройте новый треугольник, имеющий площадь равную сумме площадей изображенных треугольников. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

**Решение:**




Пусть *ABC* и *CED* – исходные треугольники. Построение:

1. Проведем прямые *EL* и *BM* параллельно *AC*.
2. Проведем прямую *EM* параллельно *AB*.
3. $N = BE \cap LN$.

Тогда площадь треугольника *AND* равна сумме площадей треугольников *ABC* и *CED*.

Обоснование: несложно убедиться в том, что высота треугольника *AND* равна полусумме высот треугольников  *ABC* и *CED* (проведенных из вершин *N*, *B* и *E* соответственно). Учитывая, что *AC*=*CD*, получим: $S_{AND} = \frac{1}{2}AD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) = \frac{1}{4}AD \cdot h_1 + \frac{1}{4}AD \cdot h_2 \;=\; \frac{1}{2}AC \cdot h_1 + \frac{1}{2}CD \cdot h_2 \;=$ $= S_{ABC} \; + S_{CED}$.

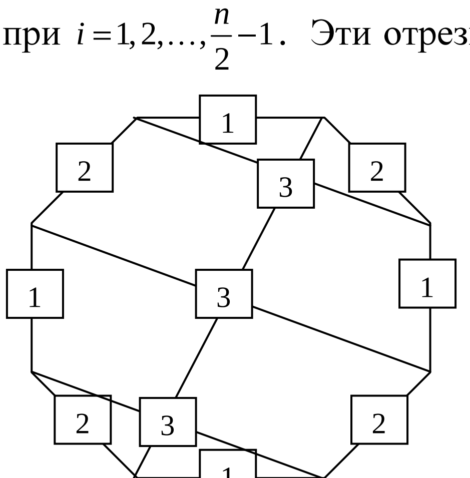
**Задача 8.**

В некоторой стране имеется $n$ городов и некоторая сеть дорог с двусторонним движением. Каждая дорога соединяет ровно два города и при этом дороги попарно не пересекаются. Из каждого города выходят ровно три дороги. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят ровно три дороги с различными номерами. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе $n \geq 4$. Для произвольного четного $n$ постройте пример расположения городов и дорог.

**Решение:**

Пусть $k$ – число различных дорог в стране. Посчитаем суммарное количество дорог в стране с учетом повторений. Будем идти по всем городам и считать количество дорог их соединяющих. Так как из каждого города выходит ровно три дороги, то суммарное количество дорог с учетом повторений равно $3n$. В то же время, каждая дорога соединяет два города, а значит, при таком подсчете учтется дважды, а стало быть, $3n = 2k$. Следовательно, $n$ четное.

Приведем пример построения такой конструкции для произвольного четного $n$. Пусть на плоскости изображен выпуклый $n$ угольник (при четном $n$). Пронумеруем его вершины числами 1,2,3,4,…, а стороны последовательно цифрами 1,2,1,2,1…. Соединим отрезками вершины с номерами $i+1$ и $n-i+1$ при $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1$. Эти отрезки пронумеруем цифрой 3.




Остается соединить дорогой с номером 3 вершины 1 и $\frac{n}{2}+1$ (см. рис. выше).

**Задача 9.**

Пусть выполнены условия задачи № 8. Путешественник выехал из некоторого города $A$, избрав себе следующий маршрут движения: из города $A$ он выезжает по дороге с номером 1, из следующего города – по дороге с номером 2, затем с номером 3, далее – снова по дорогам с номерами 1, 2, 3, 1, 2,…. Докажите, что при таком маршруте движения путешественник обязательно вернется в город $A$.

**Решение:**

Опишем маршрут движения путешественника последовательностью $b_i = (A_i, s_i)$, $i \in \mathbb{N}_0$, где $A_i$ - город, посещенный на $i$-ом шаге, $s_i$ - номер дороги-выезда из города $A_i$, и при этом $A_0 = A$, $s_0 = 1$. Количество всевозможных пар $b_i = (A_i, s_i)$ равно $3n$, следовательно, на маршруте движения $b_0, b_1, b_2, \dots$ начнутся повторения.

Предположим, что в город $A$ путешественник не вернется. Тогда поскольку на маршруте начнутся повторения, то найдутся натуральные числа $k$ и $t$ минимальные с таким свойством, т.е. такие, что выполняются условия:

$$b_t = b_k, 1 \le k \le t-1$$

и $b_i \neq b_j$ $(i \neq j)$, при всех $i, j \in \{1, \dots, t-1\}$ (другими словами, первый повтор членов последовательности $b_i = (A_i, s_i)$, $i \in \mathbb{N}_0$, произошел на шаге с номером $t$). Но тогда в город $A_k$ путешественник попадает из города $A_{k-1}$ по дороге с номером $s_{k-1}$, а затем из города $A_{t-1}$ по дороге с номером $s_{t-1}$. При этом дальнейший маршрут движения в город $A_{k+1}$ одинаковый. Тогда ввиду однозначности маршрута, номера дорог, по которым попадаем в город $A_k$, совпадают. Так как в каждый город ведут дороги с различными номерами, то города $A_{k-1}$ и $A_{t-1}$ совпадают. Но тогда $b_{k-1} = b_{t-1}$. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение не верно. А значит, утверждение доказано.